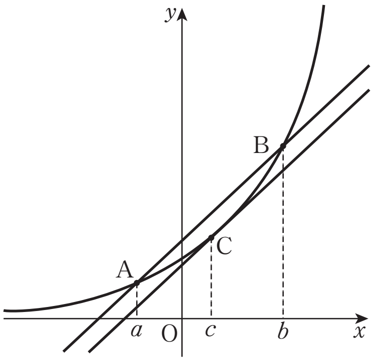
PART3 平均値の定理

要点整理と公式

要点 ① 平均値の定理

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 A$(a,\ f(a))$, B$(b,\ f(b))$ をとる。グラフがなめらかな曲線，つまり　　　　　　であれば，2 点 A，B の間の曲線上に，直線 AB と平行な接線が引ける点 C が存在する。



その接点 C の x 座標を c とすると，接線の傾きは

　　　　であり，直線 AB の傾きは $\dfrac{\qquad-\qquad}{\qquad-\qquad}$ で

あるから，次の定理が成り立つ。

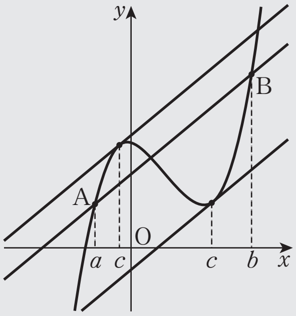
平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，

開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が(少なくとも 1 つ)存在する。



(ex) 関数 $f(x)=x^2-1$ と区間 $[-2,\ 1]$ において，平均値の定理を満たす c の値

$f(x)$ は区間 $(-2,\ 1)$ で微分可能

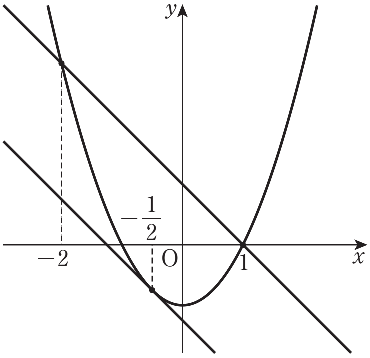
$$f'(x)=2x$$

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-3}{3}=-1$$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$$

を満たす c の値は，$-1=2c$ より $c=-\dfrac{1}{2}$



要点② 平均値の定理の不等式への応用

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明する。

$a>0$ のとき $\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

$f(x)=$ 　　 とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ a+1]$ で平均値の定理を用いると

$\dfrac{f(\quad)-f(\ )}{(\quad)-}=f'(c)$ …… ①, 　$<c<$ 　　 …… ②

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，$f'(c)=\dfrac{1}{c}$ 　よって，①より 　$\log(a+1)-\log a=\dfrac{1}{c}$

また $a>0$ であるから，②の各辺の逆数をとることにより $\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$

したがって $\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

3 (1) 次の関数 $f(x)$ と区間について，平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(i) $f(x)=x^3+2x$，$[-2,\ 1]$　　(ii) $y=\sqrt{x}$，$[4,\ 9]$

(2) 平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

Point Pickup

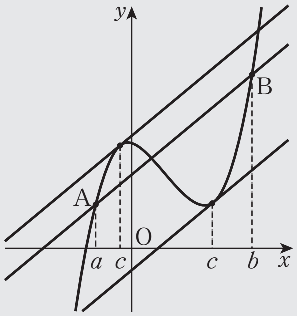
平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，

開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が(少なくとも1つ)存在する。



第10講　PART3 確認問題

1　関数 $f(x)=2x^2-3x+4$ と区間 $[-1,\ 2]$ について，

平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$

を満たす c の値を求めよ。

$c=$ ア

答えは下の①～④のうちから選べ。

① 1　② $\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{3}$　④ $-\dfrac{1}{2}$

2　関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ と区間 $[2,\ 10]$ について，

平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$

を満たす c の値を求めよ。

$c=$ イ

3 次の［ウ］～［ケ］にあてはまるものを，下の選択肢より選べ。

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明する。

$0<a<b$ のとき，

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

［証明］

$f(x)=$［ウ］とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\text{［エ］} \quad \cdots\cdots①$$

$$a<c<b \quad \cdots\cdots②$$

を満たす実数 c が存在する。

ここで，$f'(c)=$［オ］であり，②より，

$$\text{［カ］}<\text{［オ］}<\text{［キ］} \quad \cdots\cdots③$$

であるから，①，③より，

$$\text{［ク］}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\text{［ケ］}$$

［［ウ］，［エ］の選択肢］

① x　② $\frac{1}{x}$　③ $\log x$

④ $f'(x)$　⑤ $f(x)$　⑥ $f(c)$

⑦ $f'(c)$

［［オ］～［ケ］の選択肢］

① a　② b　③ c

④ $\frac{1}{a}$　⑤ $\frac{1}{b}$　⑥ $\frac{1}{c}$

⑦ $\log a$　⑧ $\log b$　⑨ $\log c$

[MEMO]

PART3 平均値の定理

3 (1) 次の関数 $f(x)$ と区間について，平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(i) $f(x)=x^3+2x$，$[-2,\ 1]$　　(ii) $y=\sqrt{x}$，$[4,\ 9]$

(2) 平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

[解答]

(1)(i) $f(x)$ は区間 $[-2,\ 1]$ で微分可能で，$f'(x)=3x^2+2$

また，$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{3-(-12)}{3}=5$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$$

を満たす c の値は，$3c^2+2=5$ より $c^2=1$　　$c=\pm 1$

このうち $-2<c<1$ を満たすのは $c=-1$

(ii) $f(x)$ は区間 $[4,\ 9]$ で微分可能で，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

また，$\dfrac{f(9)-f(4)}{9-4}=\dfrac{3-2}{5}=\dfrac{1}{5}$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(9)-f(4)}{9-4}=f'(c)$$

を満たす c の値は，$\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{1}{5}$ より $\sqrt{c}=\dfrac{5}{2}$　　$c=\dfrac{25}{4}$

(2) $f(x)=x\log x$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \cdots\cdots\ ①,\quad a<c<b\ \cdots\cdots\ ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=\log x+1$ より，$f'(c)=\log c+1$　　よって，①より　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\log c+1$

②より $\log a<\log c<\log b$　　よって $\log a+1<\log c+1<\log b+1$

また，$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ より $-2<\log a<\log b<0$　$-1<\log a+1<\log b+1<1$

ゆえに $-1<\log c+1<1$

したがって $-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

第10講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②

[解説]

$f(x)$ は区間 $(-1,\ 2)$ で微分可能で，

$$f'(x)=4x-3$$

また，

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{6-9}{3}=-1$$

よって，平均値の定理より，

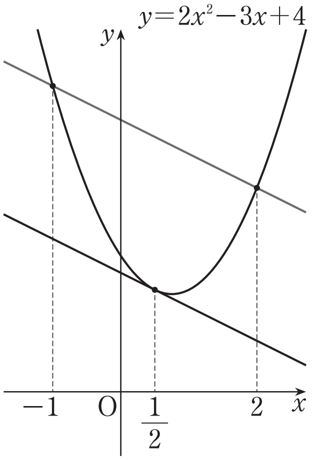
$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c) \quad \text{[A]}$$

を満たす c の値は，

$$4c-3=-1$$

$$\boldsymbol{c=\frac{1}{2}}$$

これは $-1<c<2$ を満たすので適する。

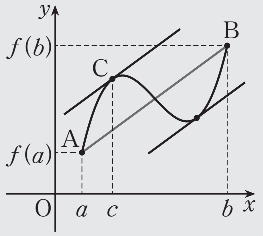


[A]　平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$a<c<b$$

を満たす実数 c が（少なくとも1つ）存在する。



2

[正解] イ：5

[解説]

$f(x)$ は区間 $(2,\ 10)$ で微分可能で,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

また,

$$\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=\frac{3-1}{8}=\frac{1}{4}$$

よって，平均値の定理より,

$$\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=f'(c)$$ [B]

を満たす c の値は,

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}}=\frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{c-1}=4$$

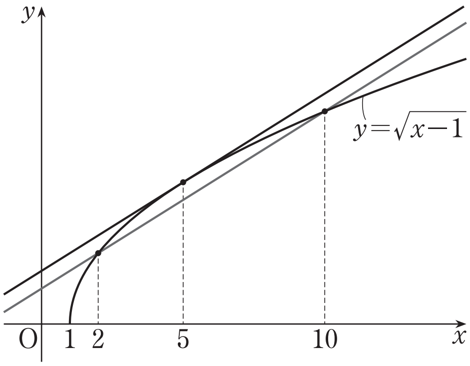
$$\sqrt{c-1}=2$$

両辺を 2 乗して,

$$c-1=4$$

$$\boldsymbol{c=5}$$

これは $2<c<10$ を満たすので適する。

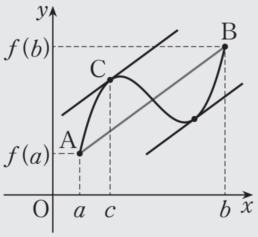


[B]　平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で,
開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$a<c<b$$

を満たす実数 c が（少なくとも 1 つ）存在する。



3　**[正解]** ウ：③，エ：⑦，オ：⑥，カ：⑤，
キ：④，ク：⑤，ケ：④

[解説]

$f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad\cdots\cdots①$$ [C]

$$a<c<b\quad\cdots\cdots②$$

を満たす実数 c が存在する。

ここで，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，$f'(c)=\dfrac{1}{c}$

②より，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}\quad\cdots\cdots③$

であるから，①，③より，

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

[C]　平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
$$a<c<b$$
を満たす実数 c が（少なくとも1つ）存在する。